

Kajian Perspektif Sifat-sifat (m, n) -Hiperideal-Kuasi pada Semihipergrup

Nayla Puspa Febriana¹, Ari Wardayani², Supriyanto³, & Idha Sihwaningrum^{4*)}
^{1,2,3,4} Universitas Jenderal Soedirman

INFO ARTICLES

Key Words:

Quasi-hyperideal; Intersection;
 Semihypergroup;
 Subsemihypergroup.



This article is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Abstract: The properties of (m, n) -quasi-hyperideals in semihypergroups have been discussed in Davvas (2016). However, the proofs of these properties are less detailed and there are no examples related to these properties. Therefore, this paper aims to study perspectively the properties of (m, n) -quasi-hyperideals in semihypergroups by providing the detailed proofs and presenting some examples of these properties. The properties of (m, n) -quasi-hyperideals in semihypergroups include the relationship between (m, n) -quasi-hyperideals and quasi-hyperideals, as well as the intersection properties of (m, n) -quasi-hyperideals.

Abstrak: Sifat-sifat (m, n) -hiperideal-kuasi pada semihipergrup telah dibahas dalam Davvas (2016). Namun demikian, bukti dari sifat-sifat tersebut kurang detil dan belum tersedia contoh berkaitan dengan sifat-sifat tersebut. Oleh karena itu, makalah ini bertujuan untuk mengkaji secara perspektif sifat-sifat dari (m, n) -hiperideal-kuasi pada semihipergrup dengan cara memberikan bukti secara detil dan menyajikan contoh dari sifat-sifat tersebut. Sifat-sifat dari (m, n) -hiperideal-kuasi pada semihipergrup meliputi hubungan antara (m, n) -hiperideal-kuasi dengan hiperideal-kuasi, serta sifat irisan dari (m, n) -hiperideal-kuasi.

Correspondence Address: Jln. dr. Soeparno, No. 61, Purwokerto, 53122, Indonesia; e-mail: idha.sihwaningrum@unsoed.ac.id

How to Cite (APA 6th Style): Febriana, N. P., Wardayani, A., Supriyanto, & Siwaningrum, I. (2026). Kajian Perspektif Sifat-sifat (m, n) -Hiperideal-Kuasi pada Semihipergrup. *Prosiding Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika*, 669-678.

Copyright: Nayla Puspa Febriana, Ari Wardayani, Supriyanto, & Idha Sihwaningrum. (2026)

PENDAHULUAN

Hiperstruktur aljabar merupakan suatu konsep dalam aljabar yang berpadanan dengan konsep struktur aljabar. Hiperstruktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi hiperoperasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada hiperstruktur aljabar, terdapat operasi antara dua himpunan yang disebut hiperoperasi biner. Hasil hiperoperasi biner dari dua elemen menghasilkan suatu himpunan tak kosong. Kajian mengenai hiperstruktur aljabar pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Perancis bernama Marty (1934).

Salah satu contoh dari hiperstruktur aljabar adalah semihipergrup, yaitu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan hiperoperasi biner dan memenuhi sifat asosiatif.

Definisi 1 (Davvas, 2016). *Hipergrupoid $(H, \circ)$ adalah himpunan tak kosong H yang dilengkapi dengan hiperoperasi biner $\circ$, yang didefinisikan oleh*

$$\circ : H \times H \rightarrow P^*(H),$$

dengan $P^(H)$ merupakan koleksi semua himpunan bagian tak kosong dari H . Suatu hipergrupoid $(H, \circ)$ disebut semihipergrup jika memenuhi*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

untuk setiap $x, y, z \in H$. Ini berarti bahwa

$$\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v.$$

Aplikasi semihipergrup diterapkan dapat ditemui di berbagai bidang kajian graf, geometri, himpunan fuzzy, dan kriptografi, dan teori automata (Corsini and Leoreanu, 2003).

Menurut Davvas (2016), salah satu hiperstruktur aljabar yang berkaitan dengan semihipergrup adalah hiperideal. Konsep hiperideal berpadanan dengan konsep ideal pada struktur aljabar.

Definisi 2. *Misalkan $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup. Subhimpunan tak kosong I yang merupakan subhimpunan dari H dikatakan hiperideal kanan (kiri) dari H jika untuk setiap $x \in I$ dan $h \in H$ berlaku*

$$x \circ h \subseteq I \quad (h \circ x \subseteq I).$$

Subhimpunan tak kosong I dikatakan hiperideal di H jika memenuhi hiperideal kiri dan hiperideal kanan.

Pada hiperstruktur aljabar juga dikenal konsep mengenai hiperideal-kuasi, seperti yang diberikan oleh Davvas (2016) pada Definisi 3.

Definisi 3. *Misalkan $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup dan himpunan Q merupakan subhimpunan tak kosong dari H . Himpunan Q dikatakan hiperideal-kuasi dari H jika memenuhi*

$$(Q \circ H) \cap (H \circ Q) \subseteq Q.$$

Hiperideal-kuasi berpadanan dengan konsep ideal-kuasi pada struktur aljabar. Gagasan mengenai ideal-kuasi adalah generalisasi dari gagasan mengenai ideal satu sisi, yaitu ideal kanan atau ideal kiri (Hila dkk., 2011). Pada perkembangannya, gagasan mengenai hiperideal-kuasi juga dapat diaplikasikan pada himpunan fuzzy (Tang dkk., 2017). Davvas (2016) juga mendefinisikan (m, n) -hiperideal-kuasi (untuk suatu bilangan bulat m dan n), yang didetilkkan oleh (Kehayopulu, 2022).

Definisi 4. Misalkan $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup dan subhimpunan tak kosong Q merupakan subsemihipergrup dari H . Himpunan Q dikatakan suatu (m, n) -hiperideal-kuasi dari H jika memenuhi

$$(H^m \circ Q) \cap (Q \circ H^n) \subseteq Q,$$

untuk suatu m dan n bilangan bulat positif dengan $H^m = H \circ H \circ \dots \circ H$ sebanyak m kali dan $H^n = H \circ H \circ \dots \circ H$ sebanyak n kali.

Berkenaan dengan (m, n) -hiperideal-kuasi dari semihipergrup, Davvas (2016) menyajikan empat sifat berikut.

Teorema 1. Setiap hiperideal-kuasi Q dari semihipergrup H merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H , untuk suatu m dan n bilangan bulat positif.

Teorema 2. Misalkan $(H, \circ)$ adalah suatu semihipergrup. Jika Q adalah suatu (m, n) -hiperideal-kuasi dari H dan A adalah subsemihipergrup dari H , maka $A \cap Q$ akan berupa himpunan kosong atau (m, n) -hiperideal-kuasi dari A .

Teorema 3. Misalkan $(H, \circ)$ adalah suatu semihipergrup dan $\{Q_i, i \in I\}$ adalah koleksi himpunan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . Jika $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i \in I} Q_i$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H .

Teorema 4. Misalkan $(H, \circ)$ adalah suatu semihipergrup. Jika L adalah m -hiperideal kiri dari H dan R adalah n -hiperideal kanan dari H , maka $L \cap R$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H .

Bukti dari sifat-sifat tersebut telah diberikan oleh Davvas (2016), namun bukti-bukti yang diberikan kurang detil. Selain itu contoh-contoh untuk teorema-teorema tersebut belum tersedia. Oleh karena itu, pada makalah ini dikaji secara perspektif sifat-sifat (m, n) -hiperideal-kuasi dari semihipergrup. Hal ini dilakukan dengan mendetilkan bukti-bukti yang telah ada serta dengan memberikan contoh-contoh yang belum tersedia.

METODE

Dalam kajian yang dilakukan secara perspektif, sifat-sifat dari (m, n) -hiperideal-kuasi dari semihipergrup (Teorema 1 sampai Teorema 4) dibuktikan secara detil. Selanjutnya, diberikan contoh dari masing-masing sifat tersebut.

HASIL

Sebelum diberikan bukti dari sifat-sifat (m, n) -hiperideal-kuasi dari semihipergrup beserta contohnya, terlebih dahulu akan diberikan contoh dari semihipergrup, yang diambil dari Davvas (2016).

Contoh 1. Misalkan diberikan suatu himpunan $H = \{a, b, c, d, e\}$, maka

$$\begin{aligned} P^*(H) = & \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \\ & \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \\ & \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \\ & \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, H\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan hiperoperasi $\circ$ di H didefinisikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Operasi $H \circ H$

$\circ$	a	b	c	d	e
a	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
b	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
c	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, c, d, e\}$
d	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
e	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, c, d, e\}$

Berdasarkan Tabel 1, terbukti bahwa $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup karena:

1. Hiperoperasi $\circ$ merupakan hiperoperasi biner di H , yaitu untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x \circ y \in P^*(H)$, dengan $P^*(H)$ adalah koleksi dari semua himpunan bagian yang tak kosong dari H .
2. Hiperoperasi $\circ$ bersifat asosiatif di H , yaitu untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. ■

Setelah diketahui contoh mengenai semihipergrup, pada Contoh 2 disajikan contoh mengenai hiperideal.

Contoh 2. Pada Contoh 1, ditunjukkan bahwa $(H, \circ)$ merupakan suatu semihipergrup. Misalkan diberikan himpunan $I = \{a, b, d\}$, maka diperoleh hal-hal berikut.

1. Untuk setiap $x \in I$ dan $h \in H$ berlaku $x \circ h \subseteq I$, seperti yang dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2 Operasi $x \circ h$

$\circ$	a	b	c	d	e
a	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
b	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
d	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$

2. Untuk setiap $x \in I$ dan $h \in H$ berlaku $h \circ x \subseteq I$. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Operasi $h \circ x$

$\circ$	a	b	d
a	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
b	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b, d\}$
c	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
d	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
e	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$

Dari nomor 1 dan 2, dapat disimpulkan bahwa himpunan I merupakan hiperideal dari H . ■

Pada Contoh 3 berikut, disajikan contoh dari hiperideal-kuasi, yang dirujuk dari Davvas (2016)

Contoh 3. Himpunan interval $H = [0, 1]$ yang dilengkapi dengan hiperoperasi $\circ$ dengan definisi $x \circ y = [0, xy]$, untuk $x, y \in H$, merupakan semihipergrup. Jika dipilih $t \in [0, 1]$ dan $T = [0, t]$, maka T juga merupakan semihipergrup (Changphas dan Davvaz, 2015). Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $T = [0, t]$ merupakan hiperideal-kuasi dari H .

1. Hiperoperasi biner antara himpunan T dan H adalah

$$\begin{aligned} T \circ H &= \bigcup_{a \in T, b \in H} a \circ b \\ &= \bigcup_{a \in T, b \in H} [0, ab]. \end{aligned}$$

Untuk $a \in [0, t]$ (yaitu $0 \leq a \leq t$) dan $b \in [0, 1]$ (yaitu $0 \leq b \leq 1$) diperoleh $0 \leq ab \leq t$ atau $ab \in [0, t]$. Dengan demikian, $[0, ab] \subseteq [0, t]$.

2. Hiperoperasi biner antara himpunan H dan T adalah

$$\begin{aligned} H \circ T &= \bigcup_{a \in H, b \in T} a \circ b \\ &= \bigcup_{a \in H, b \in T} [0, ab]. \end{aligned}$$

Untuk $a \in [0, 1]$ (yaitu $0 \leq a \leq 1$) dan $b \in [0, t]$ (yaitu $0 \leq b \leq t$) diperoleh $0 \leq ab \leq t$ atau $ab \in [0, t]$. Dengan demikian, $[0, ab] \subseteq [0, t]$.

Karena $(T \circ H) \cap (H \circ T) = [0, ab] \subseteq [0, t] = T$, maka terbukti bahwa subhimpunan tak kosong T merupakan hiperideal-kuasi dari H . ■

Konsep hiperideal-kuasi dikembangkan menjadi (m, n) -hiperideal-kuasi, yang contohnya disajikan pada Contoh 4 berikut.

Contoh 4. Diketahui $H = \{x, y, z, t\}$ adalah semihipergrup dengan hiperoperasi biner $\circ$ yang didefinisikan pada Tabel 4 dan $Q = \{z, t\}$ adalah subsemihipergrup dari H . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa Q merupakan $(2, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H .

Tabel 4. Operasi $H \circ H$

$\circ$	x	y	z	t
x	$\{x\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{x, y, z, t\}$
y	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y, t\}$	$\{y, t\}$
z	$\{z\}$	$\{z, t\}$	$\{z\}$	$\{z, t\}$
t	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$

Himpunan H^2 adalah $H^2 = H \times H = \{(x, x), (x, y), (x, z), \dots, (t, t)\}$ dan himpunan H^3 adalah $H^3 = H \times H \times H = \{(x, x, x), (x, x, y), (x, x, z), (x, x, t), \dots, (t, t, t)\}$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa Q memenuhi definisi (m, n) -hiperideal-kuasi dari H yaitu $(H^m \circ Q) \cap (Q \circ H^n) \subseteq Q$ untuk suatu m dan n bilangan bulat positif.

1. Perkalian Cartesius antara himpunan H^2 dan Q adalah

$$H^2 \times Q = \{(x, x, z), (x, x, t), (x, y, z), \dots, (t, t, t)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan H^2 dan Q adalah

$$\begin{aligned} H^2 \circ Q &= \bigcup_{a, b \in H^2, c \in Q} a \circ b \circ c \\ &= (x \circ x \circ z) \cup (x \circ x \circ t) \cup (x \circ y \circ z) \cup \dots \cup (t \circ t \circ t) \\ &= \{x, z\} \cup \{x, y, z, t\} \cup \{x, y, z, t\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{x, y, z, t\}. \end{aligned}$$

2. Perkalian Cartesius antara himpunan Q dan H^3 adalah

$$Q \times H^3 = \{(z, x, x, x), (t, x, x, x), (z, x, x, y), \dots, (t, t, t, t)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan Q dan H^3 adalah

$$\begin{aligned} Q \circ H^3 &= \bigcup_{a \in Q, b, c, d \in H^3} a \circ b \circ c \circ d \\ &= (z \circ x \circ x \circ x) \cup (t \circ x \circ x \circ x) \cup (z \circ x \circ x \circ y) \cup \dots \cup (t \circ t \circ t \circ t) \\ &= \{z\} \cup \{t\} \cup \{z, t\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{z, t\}. \end{aligned}$$

Karena $(H^2 \circ Q) \cap (Q \circ H^3) = \{x, y, z, t\} \cap \{z, t\} = \{z, t\} \subseteq Q$, maka terbukti bahwa himpunan Q merupakan $(2, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H . ■

Sifat-sifat dari (m, n) -hiperideal-kuasi pada semigrup diberikan oleh Davvas (2016), seperti yang ditampilkan pada Teorema 1 sampai Teorema 4. Teorema 1 berkaitan dengan hubungan antara hiperideal-kuasi dengan (m, n) -hiperideal-kuasi. Bukti dari teorema tersebut beserta contohnya disajikan sebagai berikut.

Bukti Teorema 1. Misalkan diambil sembarang H semihipergrup dan Q subsemihipergrup dari H . Diketahui bahwa himpunan Q adalah hiperideal-kuasi dari H , maka Q memenuhi

$$(Q \circ H) \cap (H \circ Q) \subseteq Q.$$

Karena $H \subseteq H^m$ untuk setiap $m \geq 1$ dan $H \subseteq H^n$ untuk setiap $n \geq 1$, maka

$$(Q \circ H) \subseteq (Q \circ H^m) \text{ dan } (H \circ Q) \subseteq (H^n \circ Q)$$

sehingga

$$(Q \circ H) \cap (H \circ Q) \subseteq (Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q).$$

Sementara itu, telah diketahui bahwa $(Q \circ H) \cap (H \circ Q) \subseteq Q$, maka

$$(Q \circ H) \cap (H \circ Q) \subseteq (Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q) \subseteq Q.$$

Kemudian, $(Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q) \subseteq Q$ adalah definisi dari (m, n) -hiperideal-kuasi. Oleh karena itu, terbukti bahwa setiap hiperideal-kuasi merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi untuk setiap m dan n bilangan bulat positif. ■

Contoh 5 (Contoh Teorema 1). Pada Contoh 4, telah dibuktikan bahwa $(H, \circ)$, dengan $H = \{x, y, z, t\}$ dan hiperoperasi biner yang didefinisikan pada Tabel 4, merupakan semihipergrup. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $Q = \{z, t\}$ merupakan hiperideal-kuasi dari semihipergrup $H = \{x, y, z, t\}$. Berikut penjelasannya.

1. Perkalian Cartesius antara himpunan Q dan H adalah

$$Q \times H = \{\{z, x\}, \{z, y\}, \{z, z\}, \dots, \{t, t\}\};$$

dan hiperoperasi biner antara himpunan Q dan H adalah

$$\begin{aligned} Q \circ H &= \bigcup_{a \in Q, b \in H} a \circ b \\ &= (z \circ x) \cup (z \circ y) \cup (z \circ z) \cup \dots \cup (t \circ t) \\ &= \{z\} \cup \{z, t\} \cup \{z\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{z, t\}. \end{aligned}$$

2. Perkalian Cartesius antara himpunan H dan Q adalah

$$H \times Q = \{\{x, z\}, \{x, t\}, \{y, z\}, \dots, \{t, t\}\};$$

dan hiperoperasi biner antara himpunan H dan Q adalah

$$\begin{aligned} H \circ Q &= \bigcup_{a \in H, b \in Q} a \circ b \\ &= (x \circ z) \cup (x \circ t) \cup (y \circ z) \cup \dots \cup (t \circ t) \\ &= \{x, z\} \cup \{x, y, z, t\} \cup \{y, t\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{x, y, z, t\}. \end{aligned}$$

Karena $(Q \circ H) \cap (H \circ Q) = \{z, t\} \cap \{x, y, z, t\} = \{z, t\} \subseteq Q$, maka subhimpunan tak kosong Q merupakan hiperideal-kuasi dari H .

Kemudian, pada Contoh 4 telah ditunjukkan bahwa Q adalah $(2, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H . Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa Q merupakan hiperideal-kuasi sekaligus $(2, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H . ■

Selanjutnya, pada Teorema 2 dibahas mengenai irisan dari (m, n) -hiperideal-kuasi dengan subsemihipergrup. Selain itu, pada Teorema 3 akan dibahas juga irisan antara (m, n) -hiperideal-kuasi. Bukti beserta contoh dari teorema tersebut adalah sebagai berikut.

Bukti Teorema 2. Diketahui bahwa Q adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H dan A adalah subsemihipergrup dari H . Jika tidak terdapat elemen yang sama antara himpunan A dan Q , maka diperoleh hasil yaitu $A \cap Q = \emptyset$. Jika terdapat elemen yang sama antara A dan Q , maka untuk $A \cap Q \neq \emptyset$ akan ditunjukkan bahwa $A \cap Q$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari A . Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan bahwa $((A \cap Q) \circ A^m) \cap (A^n \circ (A \cap Q)) \subseteq A \cap Q$. Jika $A \cap Q \neq \emptyset$, maka $A \cap Q$ merupakan subhimpunan dari A sedemikian sehingga

$$((A \cap Q) \circ A^m) \cap (A^n \circ (A \cap Q)) \subseteq (A \circ A^m) \cap (A^n \circ A).$$

Karena $A \circ A^m \subseteq A$ dan $A^n \circ A \subseteq A$ (yang buktinya dapat dilihat di Lampiran 16), maka

$$((A \cap Q) \circ A^m) \cap (A^n \circ (A \cap Q)) \subseteq A.$$

Kemudian, karena himpunan A adalah subsemihipergrup dari H , maka $A^m \subseteq H^m$ dan $A^n \subseteq H^n$. Karena Q adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H , maka diperoleh $(Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q) \subseteq Q$. Selain itu, jika $A \cap Q \neq \emptyset$, maka $A \cap Q \subseteq Q$. Oleh karena itu, diperoleh

$$((A \cap Q) \circ A^m) \cap (A^n \circ (A \cap Q)) \subseteq (Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q) \subseteq Q.$$

Hal ini berarti bahwa $((A \cap Q) \circ A^m) \cap (A^n \circ (A \cap Q)) \subseteq A \cap Q$. Jadi, terbukti bahwa $A \cap Q$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari A . ■

Contoh 6 (Contoh Teorema 2) Diketahui himpunan $S = \{4, 5\}$ adalah $(1, 2)$ -hiperideal-kuasi dari semihipergrup $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang dilengkapi hiperoperasi biner $\circ$ yang didefinisikan sebagai $x \circ y = \{z \geq \max\{x, y\}\}$. Subhimpunan tak kosong $A = \{3, 4, 5\}$ merupakan subsemihipergrup dari R . Selanjutnya, $A \cap S = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\} = S \neq \emptyset$ dan telah diketahui bahwa S merupakan $(1, 2)$ -hiperideal-kuasi dari semihipergrup R . Jadi, dapat disimpulkan bahwa $A \cap S$ adalah $(1, 2)$ -hiperideal-kuasi dari semihipergrup R . ■

Bukti Teorema 3. Diketahui $\{Q_i, i \in I\}$ merupakan koleksi himpunan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . Misalkan $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, maka akan dibuktikan bahwa $\bigcap_{i \in I} Q_i$ adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . Karena setiap Q_i adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H , maka berlaku

$$(Q_i \circ H^m) \cap (H^n \circ Q_i) \subseteq Q_i,$$

untuk setiap $i \in I$. Jika $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q_j$, untuk setiap $j \in I$. Kemudian,

$$(\bigcap_{i \in I} Q_i \circ H^m) \cap (H^n \circ \bigcap_{i \in I} Q_i).$$

Karena $\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq Q_j$, maka

$$(\bigcap_{i \in I} Q_i \circ H^m) \cap (H^n \circ \bigcap_{i \in I} Q_i) \subseteq (Q_j \circ H^m) \cap (H^n \circ Q_j).$$

Selanjutnya, karena Q_j merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H , maka

$$(\bigcap_{i \in I} Q_i \circ H^m) \cap (H^n \circ \bigcap_{i \in I} Q_i) \subseteq (Q_j \circ H^m) \cap (H^n \circ Q_j) \subseteq Q_j.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\bigcap_{i \in I} Q_i$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . ■

Contoh 7 (Contoh Teorema 3). Pada Contoh 4, $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup. $Q_1 = \{z, t\}$, $Q_2 = \{y, t\}$, dan $Q_3 = \{y, z, t\}$ adalah $(2, 2)$ -hiperideal-kuasi dari H . Selanjutnya, $\bigcap_{i \in I} Q_i$ adalah

$$\bigcap_{i \in I} Q_i = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \{z, t\} \cap \{y, t\} \cap \{y, z, t\} = \{t\}.$$

Himpunan H^2 adalah $H^2 = H \times H = \{(x, x), (x, y), (x, z), \dots, (t, t)\}$. Kemudian, akan ditunjukkan $\bigcap_{i \in I} Q_i = \{t\}$ adalah $(2, 2)$ -hiperideal-kuasi dari H .

1. Perkalian Cartesius antara himpunan $\bigcap_{i \in I} Q_i$ dan H^2 adalah

$$(\bigcap_{i \in I} Q_i) \times H^2 = \{(t, x, x), (t, x, y), (t, x, z), \dots, (t, t, t)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan $\bigcap_{i \in I} Q_i$ dan H^2 adalah

$$\begin{aligned} (\bigcap_{i \in I} Q_i) \circ H^2 &= \bigcup_{a \in (\bigcap_{i \in I} Q_i), b, c \in H^2} a \circ b \circ c \\ &= (t \circ x \circ x) \cup (t \circ x \circ y) \cup \dots \cup (t \circ t \circ t) \\ &= \{t\} \cup \{t\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{t\}. \end{aligned}$$

2. Perkalian Cartesius antara himpunan H^2 dan $\bigcap_{i \in I} Q_i$ adalah

$$H^2 \times (\bigcap_{i \in I} Q_i) = \{(x, x, t), (x, y, t), (x, z, t), \dots, (t, t, t)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan H^2 dan $\bigcap_{i \in I} Q_i$ adalah

$$\begin{aligned} H^2 \circ (\bigcap_{i \in I} Q_i) &= \bigcup_{a, b \in H^2, c \in (\bigcap_{i \in I} Q_i)} a \circ b \circ c \\ &= (x \circ x \circ t) \cup (x \circ y \circ t) \cup \dots \cup (t \circ t \circ t) \\ &= \{x, y, z, t\} \cup \{x, y, z, t\} \cup \dots \cup \{t\} \\ &= \{x, y, z, t\}. \end{aligned}$$

Karena $((\bigcap_{i \in I} Q_i) \circ H^2) \cap (H^2 \circ (\bigcap_{i \in I} Q_i)) = \{t\} \cap \{x, y, z, t\} = \{t\} \subseteq \bigcap_{i \in I} Q_i$, maka himpunan $\bigcap_{i \in I} Q_i$ juga merupakan $(2, 2)$ -hiperideal-kuasi dari H . ■

Sifat selanjutnya adalah sifat yang berkaitan dengan irisan antara hiperideal satu sisi pada Teorema 4. Sifat ini disajikan pada Teorema 4, yang bukti dan contohnya disajikan sebagai berikut.

Bukti Teorema 4. Berikut ini akan dibuktikan bahwa $L \cap R$ adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . Pertama, harus dipastikan terlebih dahulu bahwa $L \cap R$ merupakan himpunan tak kosong. Perhatikan bahwa

$$R^m \circ L^n.$$

Karena $R^m \subseteq H^m$, $L^n \subseteq H^n$, $R^m \subseteq R$, dan $L^n \subseteq L$, maka

$$R^m \circ L^n \subseteq (H^m \circ L) \cap (R \circ H^n).$$

Selanjutnya, karena L merupakan m -hiperideal kiri dari H , maka $H^m \circ L \subseteq L$. Selain itu, karena R merupakan n -hiperideal kanan dari H , maka $R \circ H^n \subseteq R$. Oleh karena itu,

$$R^m \circ L^n \subseteq (H^m \circ L) \cap (R \circ H^n) \subseteq L \cap R.$$

Akibatnya, $L \cap R \neq \emptyset$.

Kemudian, dapat dibuktikan bahwa $L \cap R$ adalah subsemihipergrup dari H . Berikut akan dibuktikan bahwa $L \cap R$ adalah (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . Perhatikan bahwa

$$(H^m \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^n).$$

Karena $L \cap R \subseteq L$ dan $L \cap R \subseteq R$, maka

$$(H^m \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^n) \subseteq (H^m \circ L) \cap (R \circ H^n).$$

Dengan menggunakan persamaan (1), diperoleh

$$(H^m \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^n) \subseteq (H^m \circ L) \cap (R \circ H^n) \subseteq L \cap R.$$

Dengan demikian,

$$(H^m \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^n) \subseteq L \cap R.$$

Hal ini membuktikan bahwa $L \cap R$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H . ■

Contoh 8 (Contoh Teorema 4). Himpunan $H = \{a, b, c, d, e\}$ dilengkapi dengan hiperoperasi biner $\circ$ yang didefinisikan pada Tabel 2 adalah suatu semihipergrup.

Tabel 5. Operasi $H \circ H$

$\circ$	a	b	c	d	e
a	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
b	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
c	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, c, d, e\}$
d	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, d\}$
e	$\{a\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, c, d, e\}$

Himpunan $L = \{a, c\}$ merupakan 3-hiperideal kiri dari H dan $R = \{a, b, d\}$ merupakan 3-hiperideal kanan dari H . Selanjutnya, himpunan $L \cap R$ adalah $L \cap R = \{a, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a\}$.

Himpunan H^3 adalah $H^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), \dots, (e, e, e)\}$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $L \cap R$ adalah $(3, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H .

1. Perkalian Cartesius antara himpunan H^3 dan $(L \cap R)$ adalah

$$H^3 \times (L \cap R) = \{(a, a, a, a), (a, a, b, a), (a, a, c, a), \dots, (e, e, e, a)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan H^3 dan $(L \cap R)$ adalah

$$\begin{aligned} H^3 \circ (L \cap R) &= \bigcup_{p, q, r \in H^3, s \in (L \cap R)} p \circ q \circ r \circ s \\ &= (a \circ a \circ a \circ a) \cup (a \circ a \circ b \circ a) \cup \dots \cup (e \circ e \circ e \circ a) \\ &= \{a\} \cup \{a\} \cup \dots \cup \{a\} \\ &= \{a\}. \end{aligned}$$

2. Perkalian Cartesius antara himpunan $(L \cap R)$ dan H^3 adalah

$$(L \cap R) \times H^3 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c), \dots, (a, e, e, e)\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan $(L \cap R)$ dan H^3 adalah

$$\begin{aligned}(L \cap R) \circ H^3 &= \bigcup_{p \in (L \cap R), q, r, s \in H^3} p \circ q \circ r \circ s \\ &= (a \circ a \circ a \circ a) \cup (a \circ a \circ a \circ b) \cup \dots \cup (a \circ e \circ e \circ e) \\ &= \{a\} \cup \{a, b, d\} \cup \dots \cup \{a, b, d\} \\ &= \{a, b, d\}.\end{aligned}$$

Karena $(H^3 \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^3) = \{a\} \cap \{a, b, d\} = \{a\} \subseteq (L \cap R)$, maka himpunan $(L \cap R)$ merupakan $(3, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H .

PEMBAHASAN

Pada Contoh 4 telah ditunjukkan bahwa Q adalah $(2, 3)$ -hiperideal-kuasi dari H . Dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh bahwa Q juga merupakan hiperideal-kuasi. Namun, tidak semua (m, n) -hiperideal-kuasi pada semigrup merupakan hiperideal-kuasi. Contoh mengenai hal ini disajikan pada Contoh 9.

Contoh 9. Himpunan bilangan asli N dengan hiperoperasi biner $\circ$ yang didefinisikan dengan $x \circ y = x + y$ merupakan suatu semihipergrup. Subhimpunan $Q = \{2\} \cup \{k \geq 4\}$ dengan hiperoperasi $\circ$ yang sama dengan hiperoperasi di N merupakan subsemihipergrup dari N . Akan ditunjukkan bahwa Q merupakan $(4, 5)$ -quasi-hiperideal dari N . Pertama, dicari himpunan N^4 dan N^5 .

Himpunan N^4 adalah

$$N^4 = N \times N \times N \times N = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), \dots\}$$

dan himpunan N^5 adalah

$$N^5 = N \times N \times N \times N \times N = \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 3), \dots\}.$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa Q memenuhi definisi (m, n) -quasi-hiperideal dari H yaitu $(Q \circ H^m) \cap (H^n \circ Q) \subseteq Q$ untuk suatu m dan n bilangan bulat positif.

1. Perkalian Cartesius antara himpunan Q dan N^4 adalah

$$Q \times N^4 = \{(2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 1, 3), \dots\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan Q dan N^4 adalah

$$\begin{aligned}Q \circ N^4 &= \bigcup_{a \in Q, b, c, d, e \in N^4} a \circ b \circ c \circ d \circ e \\ &= (2 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 1) \cup (2 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 2) \cup (2 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 3) \cup \dots \\ &= \{(2 + 1 + 1 + 1 + 1)\} \cup \{(2 + 1 + 1 + 1 + 2)\} \\ &\quad \cup \{(2 + 1 + 1 + 1 + 3)\} \cup \dots \\ &= \{6\} \cup \{7\} \cup \{8\} \cup \dots \\ &= \{6, 7, 8, \dots\}.\end{aligned}$$

2. Perkalian Cartesius antara himpunan N^5 dan Q adalah

$$N^5 \times Q = \{(1, 1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 3, 2), \dots\}.$$

Selanjutnya, hiperoperasi biner antara himpunan N^5 dan Q adalah

$$\begin{aligned}N^5 \circ Q &= \bigcup_{a, b, c, d, e \in N^5, f \in Q} a \circ b \circ c \circ d \circ e \circ f \\ &= (1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 2) \cup (1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 2 \circ 2) \\ &\quad \cup (1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ 3 \circ 2) \cup \dots \\ &= \{(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2)\} \cup \{(1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2)\} \\ &\quad \cup \{(1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2)\} \cup \dots \\ &= \{7\} \cup \{8\} \cup \{9\} \cup \dots \\ &= \{7, 8, 9, \dots\}.\end{aligned}$$

Karena $(Q \circ N^4) \cap (N^5 \circ Q) = \{6, 7, 8, \dots\} \cap \{7, 8, 9, \dots\} = \{7, 8, 9, \dots\} \subseteq Q$, maka himpunan Q merupakan $(4, 5)$ -quasi-hiperideal dari N . Namun, jika diambil $x = 1 \in N$ dan $y = 2 \in Q$, maka

$$\begin{aligned}(Q \circ N) \cap (N \circ Q) &= (x \circ y) \cap (y \circ x) \\ &= (1 \circ 2) \cap (2 \circ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{(1 + 2)\} \cap \{(2 + 1)\} \\ &= \{3\} \cap \{3\} \\ &= \{3\} \not\subseteq Q. \end{aligned}$$

Dengan demikian, Q bukan merupakan quasi-hiperideal dari H . ■

SIMPULAN

Beberapa sifat dari (m, n) -hiperideal-kuasi pada semihipergrup adalah sebagai berikut:

1. Setiap hiperideal-kuasi Q dari semihipergrup H merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H , untuk suatu m dan n bilangan bulat positif;
2. Jika Q adalah suatu (m, n) -hiperideal-kuasi dari H dan A adalah subsemihipergrup dari H , maka $A \cap Q$ akan berupa himpunan kosong atau (m, n) -hiperideal-kuasi dari A ;
3. Jika $\{Q_i, i \in I\}$ adalah koleksi himpunan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H dan $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i \in I} Q_i$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H ;
4. Jika L adalah m -hiperideal kiri dari H dan R adalah n -hiperideal kanan dari H , maka $L \cap R$ merupakan (m, n) -hiperideal-kuasi dari H .

Penelitian lanjut dapat dilakukan untuk mengkaji keberlanjutan teori dari (m, n) -hiperideal-kuasi, apakah hanya berlaku untuk suatu m dan n atau untuk setiap m dan n , dengan m dan n bilangan bulat positif. Selain itu, hasil yang telah diperoleh dapat juga digunakan untuk mengkaji hiperideal-kuasi pada himpunan fuzzy.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Jenderal Soedirman yang telah mendanai penelitian ini melalui skema FTKGB tahun 2026.

DAFTAR RUJUKAN

- Changphas, T., & Davvaz, B. (2015). Bi-hyperideals and quasi-hyperideals in ordered semihypergroups. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 493–508.
- Corsini, P., & Leoreanu, V. (2003). *Applications of Hyperstructure Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Davvaz, B. (2016). *Semihypergroup Theory*. Cambridge: Academic Press.
- Hila, K., Davvaz, B., & Naka, K. (2011). On quasi-hyperideals in semihypergroups. *Communications in Algebra*, 39, 4183–4194.
- Kehayopulu, N. (2022). On hypersemigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 1580-1618.
- Tang, J., Davvaz, B., & Xie, X.-Y. (2017). A study on (fuzzy) quasi- Γ -hyperideals in ordered Γ -semihypergroups. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32, 3821-3838